

M. KADOSCH

**Temps d'attente dans les transports
urbains en commun**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 10, n° V1 (1976),
p. 37-54.

http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_1_37_0

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEMPS D'ATTENTE DANS LES TRANSPORTS URBAINS EN COMMUN (*)

par M. KADOSCH (1)

RÉSUMÉ. — *Calcul du temps d'attente des passagers à une station d'une ligne de transport en commun en fonction de sa capacité de débit c , du coefficient de remplissage des véhicules g à leur arrivée et G à leur départ.*

Fonction génératrice des états d'équilibre de la file d'attente.

Lois d'arrivée de passagers les plus générales permettant de définir une chaîne de Markov induite.

Cas d'une exploitation à horaire.

0. INTRODUCTION

L'objectif principal assigné aux transports collectifs est de faire gagner du temps à l'utilisateur, notamment en essayant de diminuer les temps d'attente et l'incertitude sur le temps d'attente. L'étude des moyens à employer pour remplir cet objectif implique le calcul de cette partie aléatoire du temps de trajet, souvent la plus désagréable aux yeux de l'utilisateur, pour tout mode nouveau d'exploitation ou tout moyen nouveau de transport proposé.

L'objet de cet article est de présenter quelques résultats de calculs développés dans ce but; ils ont été obtenus après plusieurs années d'études théoriques menées à la Société CYTEC par F. Giraud et M. Kadosch avec une contribution très importante de C. Dahan (maintenant ingénieur à l'ONERA). Ils sont extraits d'un cours [1] professé au Transportation Systems Center (Cambridge, Mass.) en 1973.

Pour décrire ou représenter le service offert par un mode nouveau de transport, et la demande de la population à desservir, il faut élaborer un modèle prédictif, puisque le système analysé est nouveau, et qu'on ne peut encore se référer à des expérimentations commerciales en cours. L'emploi de méthodes de simulation, déjà peu apte à la représentation des caractéristiques de service d'un transport nouveau [2], l'est encore moins pour décrire la demande, à partir de séries statistiques existantes, ne serait-ce que par ignorance du comportement du public vis-à-vis d'un moyen non encore utilisé. Le calcul analy-

(*) Reçu mars 1975.

(1) Société CYTEC France à Coignères.

tique constitue au contraire un moyen puissant d'investigation et de prédiction, dans la mesure où il s'applique à un modèle tenant compte des aspects les plus importants de la demande qu'on puisse prévoir.

1. DESCRIPTION PHYSIQUE DE LA FILE D'ATTENTE

On se propose de calculer le temps d'attente des passagers à une station d'une ligne de transport en commun.

Les usagers se présentent à intervalles de temps α et les véhicules partent de la station à intervalles β : on se donne les lois de probabilité des intervalles α et β . Chaque véhicule peut contenir un nombre maximal K de passagers; après avoir éventuellement déchargé des passagers lors de son arrivée à la station, il se présente devant le quai de chargement avec K' places disponibles et K'' places occupées par des passagers qui poursuivant leur voyage ne descendent pas. On suppose connue la loi de probabilité de $K' = K - K''$. Rien n'empêcherait de considérer aussi K comme une variable aléatoire, connue par sa loi de probabilité : on supposera toutefois K constant dans cette étude.

La méthode directe de calcul du temps d'attente d'un usager, le n -ième qui se présente, serait de le suivre de l'instant A_n où il arrive à l'instant B_n où il monte dans un véhicule, puis de noter l'instant C_n de départ du véhicule, en considérant que l'usager ne fait pas la queue s'il monte dans le premier véhicule qui se présente après A_n : son temps d'attente ($C_n - A_n$) est alors interprété comme un temps de service; mais les usagers peuvent ne pas monter dans le premier véhicule, s'il ne contient pas assez de places disponibles K' ; on supposera pour simplifier que de tels usagers forment sur le quai une file d'attente dans leur ordre d'arrivée; si le départ final de l'usager à l'instant C_n a été précédé d'un autre départ à un instant $C'_n > A_n$, il aura séjourné dans la file d'attente pendant le temps $C'_n - A_n$, et attendu au surplus pendant le *temps de service* $C_n - C'_n$: le *service* ainsi défini consiste donc à assurer le départ, dans le véhicule qui se présente, d'un certain nombre $V \leq K'$ de passagers.

Avec un véhicule susceptible de présenter plus d'une place disponible, A_n seul serait une caractéristique individuelle de l'usager C_n étant commun à un nombre aléatoire de passagers, dont certains ont pu faire la queue (au sens précédent) et d'autres non. La méthode n'est donc applicable simplement qu'à des véhicules de $K = 1$ place (ex. : *teleski*) ou au trottoir roulant.

Pour tourner la difficulté, on observe la station aux instants successifs T_n où le n -ième *véhicule* desservant la ligne cesse de charger des passagers et part. Pour plus de clarté, associons à T_n l'instant $T_n - T_c$ où le véhicule arrivé en station cesse de décharger des passagers et commence à en charger : le rôle joué par la durée T_c de chargement, variable aléatoire de moyenne t_c , et par les K'' passagers qui transitent, peut être éliminé comme suit : le *système* étudié est constitué par les passagers en nombre V_n qui viennent occuper

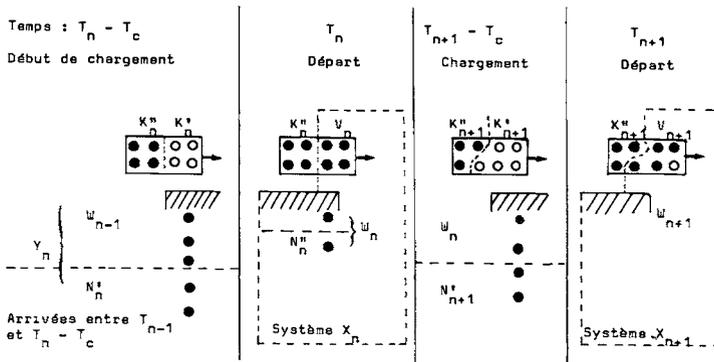


Figure 1

l'une des K' places disponibles pendant le temps T_c , et par ceux qui restent sur le quai en nombre W_n ; V_n et W_n sont comptés à l'instant T_n et ont pour somme $X_n = V_n + W_n$.

La description physique est la suivante (fig. 1) :

État à $T_n - T_c$:

Véhicule : K'_n places libres (+ K''_n places occupées) = K .

Station : W_{n-1} (demeurés sur le quai à T_{n-1})
 + N'_n (arrivés entre T_{n-1} et $T_n - T_c$) } = Y_n .

État à T_n , si N''_n passagers sont arrivés entre $T_n - T_c$ et T_n :

Véhicule : V_n passagers nouveaux (+ K''_n passagers transitant).

Station : W_n passagers demeurant sur le quai.

« Système » : $X_n = V_n + W_n = Y_n + N''_n$.

Les variables aléatoires X_n et W_n ne dépendent que de la loi du nombre d'arrivées entre T_{n-1} et T_n , c'est-à-dire : $N_n = N'_n + N''_n$, quelle que soit la loi de T_c , quel que soit l'ordre dans lequel les V_n passagers sont montés, éventuellement par plusieurs portes à la fois et pour s'installer à des places disponibles interchangeables.

Le processus de la file d'attente est décrit par les équations :

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + N_{n+1} - K'_{n+1} & \text{si } W_n + N_{n+1} - K'_{n+1} \geq 0 \\ &= 0 & \text{si } W_n + N_{n+1} - K'_{n+1} \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ou bien par :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - K'_n + N_{n+1} & \text{si } X_n \geq K'_n \\ &= N_{n+1} & \text{si } X_n \leq K'_n. \end{aligned} \quad (2)$$

L'état du système (fig. 1) est décrit par la séquence des valeurs de X_n , ou de W_n , variable d'état.

Le milieu qui environne ce système est constitué par les passagers qui sont chargés aux autres stations, par ceux qui sont déchargés à la station considérée, et par ceux qui ne sont pas encore arrivés au temps T_n .

Les propriétés « pertinentes » du système et du milieu, pour le but assigné à l'étude, sont celles en fonction desquelles il est possible d'exprimer les lois de probabilité de K'_n et de N_n , afin de calculer les valeurs de X_n , ainsi que celles qui permettent d'évaluer les instants T_n , afin de calculer les temps d'attente. Les grandeurs à introduire ou à calculer sont donc : des grandeurs munies d'une loi d'addition : nombres de passagers, nombres de places, intervalles de temps; et les rapports intensifs entre deux de ces grandeurs : coefficients de remplissage, débits, taux de service et d'arrivée, périodes de récurrence.

2. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE RECHERCHÉE

Le processus de file d'attente précédent se prête à une analyse susceptible d'en éclairer les propriétés et de permettre le calcul de ses caractéristiques les plus intéressantes, si ce processus est une chaîne de Markov. L'un des objets de cet article est d'établir dans quelles conditions il en est ainsi, et de calculer les états d'équilibre de la chaîne de Markov obtenue. L'autre objet est de calculer le temps d'attente à partir de la connaissance de ces états.

Une chaîne de Markov est une suite d'états telle que la n -ième état ne dépende que du $(n - 1)$ -ième et de lois de probabilités indépendantes de n .

La chaîne d'états (1) n'est une chaîne de Markov que si K'_n et N_n ne dépendent pas de n : dans ce cas, on peut supprimer l'indice n et écrire les équations d'une chaîne de Markov :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - K' + N & \text{si } X_n \geq K' \\ &= N & \text{si } X_n \leq K. \end{aligned} \quad (3)$$

Les lois de probabilité données seront alors notées :

π_j , probabilité pour que $K' = j$ places soient disponibles dans le véhicule;
de fonction génératrice : $\Pi(s) = \sum \pi_j s^j$;

a_k , probabilité pour que $N = k$ passagers arrivent à la station dans l'intervalle $\beta_n = T_n - T_{n+1}$, de fonction génératrice : $A(s) = \sum a_k s^k$;

$h(t) dt$, probabilité pour que β_n soit dans l'intervalle borélien $[t, t + dt]$, avec une valeur moyenne : $E(\beta) = \bar{\beta}$.

3. PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME ET DU MILIEU

Les propriétés suivantes contribuent à caractériser le système (fig. 1) outre la variable d'état X_n :

— la capacité K des véhicules;

- la distribution $h(\beta)$ des intervalles d'arrivée;
- la capacité de débit de la station : $c = K/\bar{\beta}$ places/unité de temps.

La loi d'arrivée des véhicules peut être simple (ex. : $\beta = \text{Cte}$) ou compliquée (ex. : systèmes P.R.T.) [3]. Sa détermination analytique pour un type donné d'exploitation pose des problèmes redoutables, qui ne sont résolus qu'en partie ([1], [3]). Elle ne sera pas abordée ici : prenant le problème par l'autre bout, nous chercherons des classes de lois d'arrivée utilisables : elles devront en tous cas être indépendantes de n .

La loi de disponibilité de K' places, si on la suppose donnée, apparaît comme une propriété pour le système représenté (fig. 1) : en réalité nous verrons que c'est une *réponse* du système à la demande aux stations précédentes, qui est une propriété du milieu.

Le milieu peut être caractérisé :

par le débit ρ de passagers qui restent dans les véhicules, transitent, et déterminent le coefficient moyen g de remplissage des véhicules aux instants $T_n - T_c$ où ils se présentent au chargement avec K'' places occupées;

par le débit des passagers qui arrivent à la station et qui n'est autre que le *taux d'arrivée* λ de la file d'attente : si $N(T_0)$ désigne le nombre de passagers arrivant pendant un temps d'observation T_0 assez long, λ est défini par la relation : $N(T_0) = \lambda T_0$, et n'est une propriété du milieu, du moins pratiquement, que si l'arrivée des passagers se fait au hasard, les passagers ne disposant d'aucune information qu'ils puissent utiliser pour réduire leur temps d'attente. La loi d'arrivée, caractérisée par exemple par $A(s)$, est alors une propriété du milieu; si la loi de N dépend de certaines propriétés du système, c'est une réponse du milieu au système.

Outre le coefficient de remplissage g , on peut considérer le coefficient de remplissage G mesuré à l'instant T_n du départ, après chargement; g et G sont des réponses du système au milieu, qui satisfont aux relations :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= g K / \bar{\beta} = g c, \\ \rho + \lambda &= G K / \bar{\beta} = G c, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= (G - g) c, \\ E(K'') &= g K, \quad E(K') = (1 - g) K. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Le débit des places disponibles n'est autre que le *taux de service* de la file d'attente, inverse de la période moyenne v de récurrence d'une place vide :

$$\mu = v^{-1} = (1 - g) K / \bar{\beta} = (1 - g) c. \quad (6)$$

Supposons alors que le flux $K/\bar{\beta}$ de places traversant la station soit assimilable à une séquence d'épreuves de Bernoulli avec une probabilité g d'échec (la place est occupée) et $(1 - g)$ de succès (la place est libre). La probabilité

de trouver K' places libres dans la séquence de K épreuves de Bernoulli représentant le chargement d'un véhicule de K places qui arrive, obéit à la loi binomiale, indépendante de l'état n :

$$\pi_j = \Pr(K' = j) = B(j, K) = \binom{K}{j} g^{K-j}(1-g)^j, \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (7)$$

Cette loi représente correctement la distribution de K' pendant toute période, ou ensemble de périodes caractérisé par une valeur de $Kg = E(K')$. On observera par exemple le système tous les vendredis entre 17 h et 18 h : la loi de K' sera indépendante de n pour les séquences d'états observés.

La fonction génératrice des états K' est $\Pi(s) = [(1-g)s + g]^K$.

La loi binomiale se prête à l'interprétation suivante, dont l'utilisation systématique [1] se révèle très instructive : remplaçant les K places du véhicule par une seule ligne de places vides ou occupées, considérons à l'entrée de la zone de chargement un flux fictif de sièges vides qui suit une loi de Poisson de paramètre μ , la probabilité d'occurrence de $Z_1 = j$ sièges vides en un temps t étant

$$\Pr(Z_1(t) = j) = e^{-\mu t} (\mu t)^j / j!. \quad (8)$$

Ce flux est mélangé avec un flux fictif de Poisson de sièges occupés, de paramètre ρ :

$$\Pr(Z_2(t) = k) = e^{-\rho t} (\rho t)^k / k!. \quad (9)$$

La convolution de ces deux flux donne un flux de Poisson de paramètre $\rho + \mu = c$:

$$\Pr(Z_1 + Z_2 = n) = e^{-ct} (ct)^n / n!. \quad (10)$$

Si K sièges fictifs successifs sont regroupés en un véhicule fictif, la probabilité de trouver $Z_1 = j$ sièges vides parmi $Z_1 + Z_2 = K$ est :

$$\frac{\Pr(Z_1 = j) \Pr(Z_2 = K - j)}{\Pr(Z_1 + Z_2 = K)} = \binom{K}{j} \left(1 - \frac{\rho}{c}\right)^j \left(\frac{\rho}{c}\right)^{K-j} = \pi_j$$

puisque $g = \rho/c$. La distribution des sièges de ce véhicule fictif est identique à (7).

L'intervalle δ qui sépare deux sièges fictifs de loi (10) a une distribution exponentielle de moyenne $1/c = \bar{\beta}/K = \bar{\delta}$. L'intervalle β' nécessaire pour réunir l'échantillon fictif de K sièges est la somme $\delta' = \delta_1 + \dots + \delta_K$ de K intervalles à distribution exponentielle. Il a donc une distribution γ - K , de densité :

$$h'(\beta') = e^{-c\beta'} c^K \beta'^{K-1} / (K-1)!$$

d'espérance $\bar{\beta}' = K/c = K\bar{\delta} = \bar{\beta}$, de variance $\sigma^2 = K/c^2 = K\bar{\delta}^2 = \bar{\beta}^2/K$, et d'écart relatif $\sigma/\beta' = 1/\sqrt{K}$, qui tend vers $\beta = \text{Cte}$ quand K augmente indé-

finiment. Or il est vrai que pour une même capacité de débit c , plus K et β sont grands, plus il est facile de maintenir des intervalles constants β , avec un écart relatif faible; tandis que des véhicules à faible capacité K , de type capsule, se suivent à intervalles irréguliers pouvant obéir à une loi de Poisson tronquée (en raison de leur dimension finie). Mais il ne faut pas s'exagérer la portée de cette remarque : il n'existe aucune autre raison pour que la loi $h(\beta)$ des intervalles réels s'exprime en fonction de K . L'hypothèse d'une distribution γ ou Erlang- K de β n'est donc avancée que pour effectuer des calculs numériques commodes, sans autre signification physique.

**4. DESCRIPTION PHYSIQUE DU TEMPS D'ATTENTE.
RELATION AVEC LE TAUX D'ARRIVÉE**

Un passager qui arrive au temps T_i , trouve devant lui X passagers dans le système, qu'il quitte à son tour au temps T_n , après un temps de séjour dans le système : $T_n - T_i = T_a$, qui est son temps d'attente avant le départ (fig. 2).

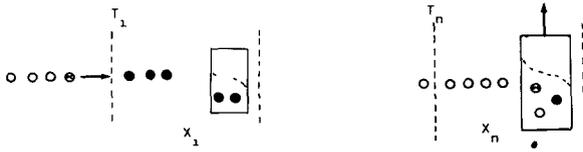


Figure 2

Si nous mesurons pendant une période T_0 d'observation le nombre moyen $E(X)$ de passagers dans le système et le temps moyen de séjour $E(T_a)$ de chacun, le temps total de séjour des $N(T_0)$ passagers qui sont arrivés peut s'écrire : $N(T_0) E(T_a)$ ou $T_0 E(X)$. D'où la relation :

$$E(X) = \lambda E(T_a) \tag{12}$$

qui permet de calculer $E(T_a)$ si λ a un sens, et si $E(X)$ est accessible au calcul.

D'après (4) le nombre moyen de passagers embarqués est :

$$E(N) = (G - g) K = \lambda \bar{\beta}. \tag{13}$$

Les équations (3) montrant que : $E(X) \geq E(N)$, on en déduit une valeur minimale du temps d'attente :

$$E(T_a) \geq \beta \quad \text{si } \lambda \neq 0. \tag{14}$$

Les cas suivants qui se présentent couramment montrent toutefois que pour chaque loi d'arrivée le sens de λ doit être analysé avec soin.

a) Arrivée en groupes

Avec une même valeur de λ , les passagers peuvent arriver un par un à intervalle moyen $1/\lambda$, ou simultanément par groupes de r à intervalle moyen \bar{r}/λ , r étant aléatoire. La file d'attente ne s'allonge pas indéfiniment si $1/\lambda > v = 1/\mu$.

Mais l'attente des membres d'un groupe moyen de \bar{r} , après l'arrivée du premier véhicule, varie de 0 à $\bar{r}v$, avec une valeur moyenne $\bar{r}v/2$: pour un même taux d'arrivée, l'attente est donc proportionnelle à la taille des groupes.

b) Variation continue de la demande

Le paramètre λ dépend de la période d'observation choisie T_0 : il varie fortement entre les heures de pointe et les heures creuses et se présente comme une fonction du temps $\lambda(t)$. On définit dans ce cas une fonction intégrée [4] :

$$N(t - t_i) = \Lambda(t_i, t) = \int_{t_i}^t \lambda(z) dz \quad (15)$$

qui représente un flux dit *régulier*, si $\Lambda(t_i, t)$ est une fonction continue, monotone non décroissante, et si les passagers n'arrivent pas en groupe.

c) Exploitation à horaire

Les passagers sont informés des instants T_n de départ des véhicules, et savent par exemple qu'ils se situent dans l'intervalle $[t_n, t_n + \varepsilon]$, t_n étant une heure affichée, ε mesurant la contrainte d'horaire pour l'exploitant. La loi d'arrivée dépend évidemment de T_n : les passagers veulent prendre un véhicule déterminé d'heure t_n , et se présentent dans l'intervalle $[t_n - \varepsilon', t_n]$, ε' mesurant l'incertitude sur le temps nécessaire pour se rendre à la station, compte tenu des encombrements, et $[t_n - \varepsilon', t_n]$ mesurant la contrainte d'horaire pour l'utilisateur. Le temps d'attente moyen est $1/2(\varepsilon + \varepsilon')$, et l'inégalité (14) n'est pas satisfaite. A la limite : $\varepsilon + \varepsilon' \rightarrow 0$, l'avantage d'une attente nulle est acquis au prix d'une contrainte insupportable : le modèle mathématique correspondant est une arrivée en groupes à des instants t_n préassignés, qu'on appelle flux *singulier* [4], si les arrivées à deux instants différents sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

d) Mélange de flux

Soit $f(k, \lambda, t)$ la probabilité d'arrivée de k passagers dans le temps t avec un taux λ , mais supposons que le flux d'arrivée soit la somme de flux d'origines indépendantes et de lois différentes, par exemple : migrants, non migrants, captifs des transports en commun, etc. Par exemple pour deux flux de proba-

bilités $f_1(k, \lambda_1, t)$ et $f_2(k, \lambda_2, t)$, supposons que le passager qui arrive a une probabilité p d'appartenir au premier flux et $(1 - p)$ d'appartenir au second. La probabilité pour le flux composé de l'arrivée de k passagers dans le temps t est : $f = p f_1(k, \lambda_1, t) + (1 - p) f_2(k, \lambda_2, t)$. En général cette loi n'est pas indépendante des états passés, c'est-à-dire que suivant que l'on connaît ou que l'on ne connaît pas le nombre d'arrivées jusqu'à un instant t_1 , les probabilités conditionnelle et inconditionnelle de k arrivées dans l'intervalle (t_1, t_2) qui suit ne sont pas les mêmes. Les distributions indépendantes des états passés ont une forme particulière [4].

5. MODÈLES DE LOIS D'ARRIVÉE

La discussion qui précède attire l'attention sur les distributions, c'est-à-dire les probabilités pour que k passagers se présentent dans un intervalle de temps $[t, t + dt]$, qui ont l'une des propriétés suivantes :

- distribution ordonnée (O) : la probabilité d'arrivée simultanée de plusieurs passagers en groupes est négligeable;
- distribution stationnaire (S) : la probabilité ne dépend pas de l'instant t ;
- distribution indépendante du passé (I) ou sans mémoire des états entre O et t .

Les distributions qui n'ont pas ces propriétés sont notées (\bar{O}) (\bar{S}) et (\bar{I}) respectivement.

La loi d'arrivée la plus simple est la loi de Poisson, qui a les trois propriétés ci-dessus ($O \cap S \cap I$) : ces conditions trop restrictives ne sont généralement pas satisfaites, et le modèle dérivé de la loi de Poisson doit être étendu à des distributions plus générales pour être utile; nous commencerons cependant par déterminer ce modèle qui est le plus commode pour expliciter les calculs au départ.

a) Loi de Poisson : $O \cap S \cap I$

Si le nombre $N(t)$ de passagers qui arrivent en un temps t suit une loi de Poisson de paramètre λ , égal dans ce cas au taux d'arrivée, le nombre N qui arrive dans l'intervalle $\beta = T_n - T_{n+1}$ de densité $h(t)$, satisfait à la loi de probabilité [5] :

$$a_k = \Pr [N = k] = \int e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} h(t) dt. \tag{16}$$

Si $\beta = \text{Cte}$, $N = N(\beta)$ suit une loi de Poisson.

Si $h(t)$ est la loi $\gamma - K$ [formule (11)], posons $\beta = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_K$, somme d'intervalles fictifs à distribution exponentielle, et appelons N_i le

nombre de passagers arrivant pendant δ_i , dont la densité est : ce^{-ct} . On trouve à l'aide de (16) que :

$$\Pr(N_i = k) = \frac{c}{c+\lambda} \left(\frac{\lambda}{c+\lambda} \right)^k$$

de fonction génératrice :

$$A_i(s) = \frac{c}{c+\lambda-\lambda s} = \frac{1}{1+(1-s)(G-g)}.$$

La fonction génératrice de N obtenue par convolution est donc :

$$A(s) = [1+(1-s)(G-g)]^{-K}. \quad (17)$$

b) Distribution stationnaire (S)

Soit $P_1(t)$ la probabilité d'au moins une arrivée pendant le temps t :

THÉORÈME DE KHINCHIN : *Pour toute distribution S, quand t tend vers 0, la limite : $\lim P_1(t)/t \rightarrow y' > 0$ existe [4].*

L'équation (12) et l'inéquation (14) sont vraies pour toute distribution stationnaire S :

— distribution ordonnée (indépendante ou non du passé) : $(S \cap O) : \lambda' = \lambda$;

— distribution non ordonnée : $S \cap \bar{O} : \lambda' < \lambda$;

— distribution ordonnée ou non et indépendante du passé : $S \cap I$: dans ce cas, $N(t)$ suit une loi de Poisson composée.

Pour une telle distribution, on peut définir :

b_r , probabilité qu'un groupe de r passagers arrive en même temps,

$z_r(t)$, nombre de r -groupes arrivant dans le temps t ,

$$B(s) = \sum b_r s^r.$$

La fonction génératrice de $N(t) = \sum r z_r(t)$ est :

$$\exp[\lambda' t(B(s)-1)].$$

Pour toute distribution stationnaire indépendante du passé, on peut calculer :

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \int N(t) h(t) dt, \\ A(s) &= \int e^{\lambda' t [B(s)-1]} h(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

On trouve en particulier :

$$E(N) = K(G-g) = \lambda' \beta \sum r b_r = \lambda' \beta E(r).$$

Donc le taux d'arrivée est :

$$\lambda = \lambda' E(r). \quad (19)$$

c) Distribution non stationnaire \bar{S}

Dans le cas où elle est indépendante du passé ($\bar{S} \cap I$) on démontre (Khinchin) qu'elle est la somme d'un flux régulier ordonné ($\bar{S} \cap I \cap O$) et d'un flux singulier [4].

Le flux régulier peut être étudié à l'aide de la fonction (15) et forme le processus de Poisson suivant, sur l'intervalle (t_i, t_f) de variation :

$$\left. \begin{aligned} a_k(t_i, t_f) &= \Lambda^k e^{-\Lambda} / k!, & E(N) &= \Lambda(t_i, t_f), \\ A(s) &= e^{(s-1)\Lambda(t_i, t_f)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

La loi suivante est vérifiée approximativement sur $(t_f, t_i) = T$:

$$\Lambda(0, T) \cdot E(T_a) = T \cdot E(X) \quad (21)$$

et l'inéquation (14) est vraie.

Le flux singulier n'est pas ordonné, et nous savons qu'il représente à la limite une exploitation à contrainte d'horaire, pour laquelle l'inéquation (14) n'est pas vraie.

Pour des lois d'arrivées plus générales que celles étudiées, notamment pour des mélanges de flux non stationnaires, nous ne connaissons pas de modèle analytique utilisable.

6. SOLUTION DE LA CHAÎNE DE MARKOV

Considérant la chaîne de Markov (3), on cherche les probabilités p_i pour que $X_n = i$, de fonction génératrice $P(s) = \sum p_i s^i$. On démontre que ces probabilités tendent vers une limite quand n augmente indéfiniment, et définissent un état d'équilibre [5] *persistant* si $G < 1$, état dans lequel β/p_i est la période moyenne de récurrence de l'évènement $X_n = i$.

L'état d'équilibre se définit en comparant un grand nombre N de processus, par exemple le trafic entre 17 h et 18 h tous les vendredis d'une année ($N = 52$), sur une ligne où les véhicules se suivent toutes les 30 secondes ($n \leq 120$) : l'espérance du nombre de cas où $X_n = i$ tend vers Np_i si n est très grand; et l'espérance de X est $E(X) = \sum ip_i$.

Il s'agit d'un équilibre maintenu par un grand nombre de transitions en sens opposés : la file d'attente d'un vendredi particulier ne tend pas vers l'équilibre; dans une séquence particulière on aura la plupart du temps $X_n > E(X)$ ou $X_n < E(X)$, surtout si la période de récurrence a une variance très grande; $E(X)$ est la moyenne sur l'ensemble des vendredis.

Le calcul des états d'équilibre est fait dans l'Appendice. On y démontre que $P(s)$ peut se mettre sous la forme :

$$P(s) = \frac{A(s) Q(s)}{s^K - A(s) \Pi_1(s)}, \quad (22)$$

où $\Pi_1(s)$ est la fonction génératrice de K'' : $\Pi_1(s) = s^K \Pi(1/s)$, et où $Q(s)$ est un polynôme de degré K qui a K racines s'_j de module inférieur à 1, en commun avec le dénominateur : connaissant ces racines, on peut calculer les coefficients du polynôme $Q(s)$.

Pour pouvoir exprimer algébriquement ces racines, il faut que le dénominateur soit un polynôme, ce qui est le cas avec les lois (7) et (17) pour lesquelles nous présentons une application numérique.

Si les arrivées de passagers sont poissoniennes et si la distribution de β est γ - K , on trouve en effet :

$$P(s) = \frac{Q(s)}{s^K [1 + (s-1)(G-g)]^K - (1-g+gs)^K}, \quad (23)$$

si $\alpha_m = \exp(2i\pi m/K)$, les racines du dénominateur satisfont aux K équations :

$$(G-g)s^2 + s(g\alpha_m - 1 + g - G) + \alpha_m(1-g) = 0. \quad (24)$$

Pour tout m , il y a deux racines s_m, s'_m : $|s'_m| < 1$ et $|s_m| > 1$.

La fonction génératrice est alors :

$$P(s) = \frac{(1-s_1)(1-s_2)\dots(1-s_K)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_K)}, \quad (25)$$

$$E(X) = P'(1) = \sum_1^K \frac{1}{s_m - 1} = \lambda E(T_a), \quad (26)$$

$$\text{Var}(X) = \sum \frac{1}{(s_m - 1)^2} + \frac{1}{s_m - 1} = \sigma^2(X). \quad (27)$$

7. RÉSULTAT NUMÉRIQUE POUR LA LOI CI-DESSUS

La figure 3 représente $E(X)$ en fonction de G pour diverses valeurs de g et K . La figure 4 représente $E(T_a)$ en fonction de $G - g$. La figure 5 représente l'écart-type d'après (27).

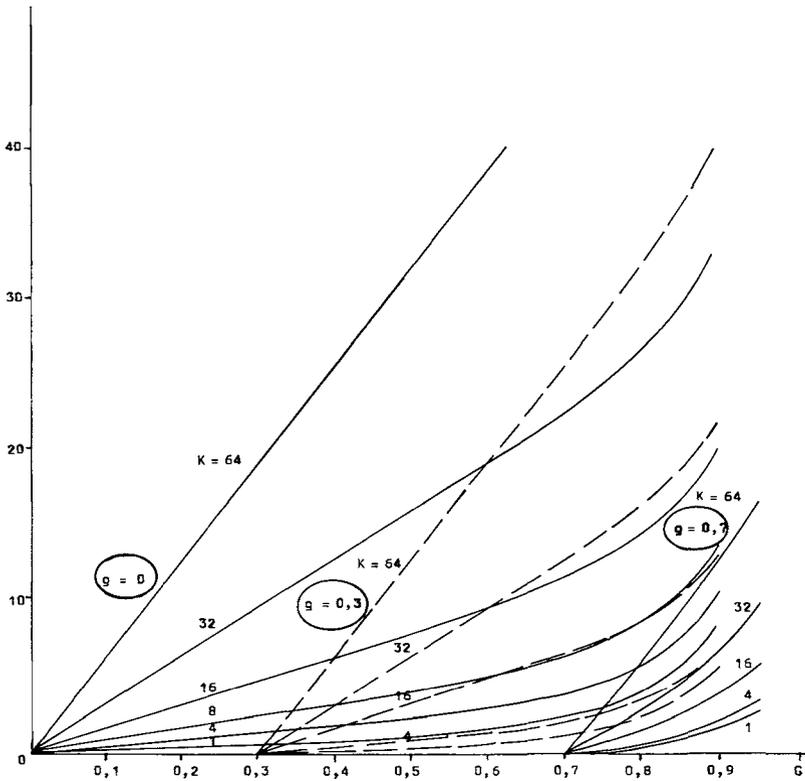


Figure 3

Espérance de $X = V + W$ lorsque l'intervalle entre véhicules suit une loi γ - K .

Quand $G - g$ tend vers 0, le temps d'attente d'un passager supplémentaire est trouvé égal à :

$$\lim_{G \rightarrow g} E(T_a) = \frac{\beta}{1 - g^K}, \quad \lim_{G \rightarrow g} E(X) = \frac{K(G - g)}{1 - g^K}.$$

Quand G tend vers 1, $E(X)$ devient infini comme $(G - g)/(1 - G)$ et $E(T_a)$ comme $\beta/[K(1 - G)]$.

Le temps d'attente est donc représentable par la formule approchée :

$$E(T_a) \simeq \frac{\beta}{1 - g^K} + \frac{\beta}{K(1 - G)} - \frac{\beta}{K(1 - g)} \tag{28}$$

entre g et G .

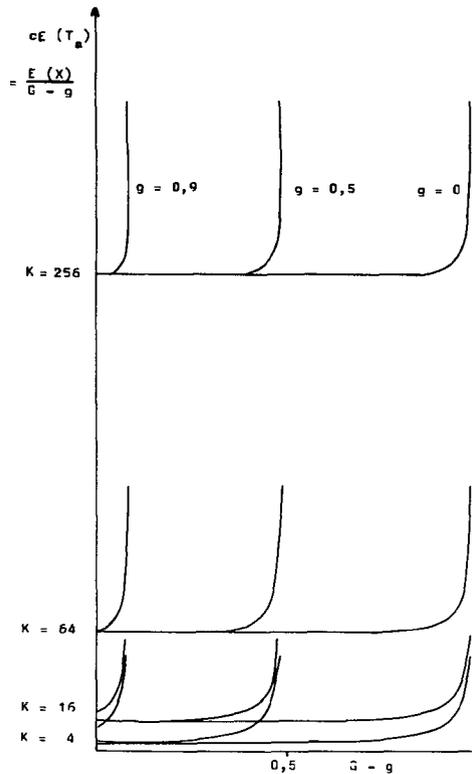


Figure 4

Espérance du temps d'attente des passagers pour une capacité donnée de station :
 $c = K/\beta$ et des véhicules arrivant avec un coefficient moyen de remplissage g .

8. APPLICATIONS

L'évaluation du trafic sur une ligne de capacité de débit c à partir d'une matrice origine-destination de la demande, permet de calculer à toute station g et G . Les figures 3 à 5 et les formules (12), (28) fournissent alors, en l'absence d'indications précises sur les lois d'arrivées, une première approximation du temps d'attente, dans la mesure où le système est valablement représenté par une chaîne de Markov (3) persistante ($G < 1$) atteignant ses états d'équilibre. On peut admettre des arrivées en groupe (19), des flux de voyageurs fonctions du temps (20), (21). L'approximation est sujette à caution si la loi d'arrivée des passagers dépend des états antérieurs du système, qui

ne possède pas dans ce cas la propriété markovienne. D'autres modèles [6] ont été élaborés pour étudier plus commodément les régimes transitoires (périodes où $G > 1$).

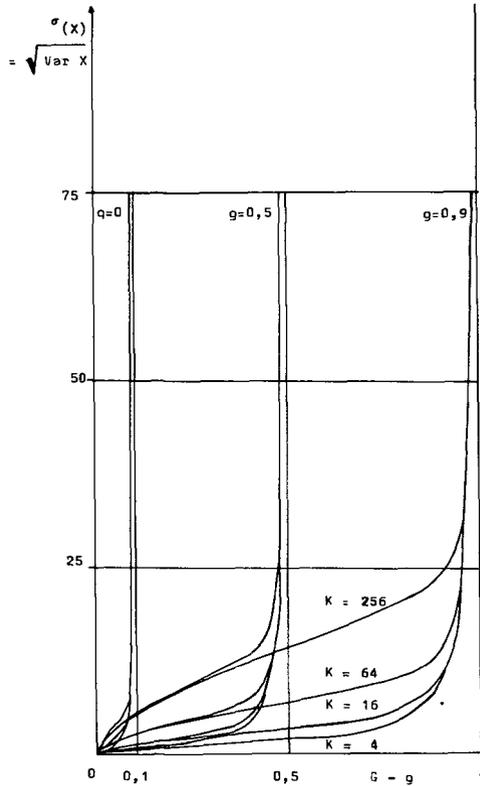


Figure 5

Écart-type du nombre X de passagers dans le système (pour une distribution γ de l'intervalle entre véhicules).

Le modèle proposé ici tombe en défaut dans le cas d'une exploitation à horaire; et plus généralement chaque fois qu'une corrélation entre l'instant d'arrivée des passagers et l'instant de départ des véhicules peut être établie et utilisée pour réduire le temps d'attente, par une action du passager, ou de l'exploitant ou des deux. Cependant la réduction du temps d'attente par rapport au modèle aléatoire n'est jamais gratuite; elle indique que le passager a subi une contrainte, ou perdu du temps ailleurs : l'attente et ses modalités sont les fruits du hasard et de la nécessité.

APPENDICE

**FONCTION GÉNÉRATRICE DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE
DE LA FILE D'ATTENTE DEVANT UNE SÉQUENCE DE VÉHICULES**

On cherche les états d'équilibre de la chaîne de Markov

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - K' + N && \text{si } X_n \geq K', \\ X_n &= N && \text{si } X_n \leq K' \end{aligned}$$

états de probabilités désignés par

$$\Pr(X_n = i) = p_i, \quad P(s) = \sum_0^{\infty} p_i s^i$$

connaissant les lois de probabilité de K' et N désignés par

$$\begin{aligned} \Pr[N = k] &= a_k, & A(s) &= \sum_0^{\infty} a_k s^k, \\ \Pr[K' = l] &= \pi_l, & \Pi(s) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \pi_l s^l \end{aligned}$$

On simplifie en effet les calculs en admettant que K' prenne des valeurs entières positives et négatives, étant entendu que : $\pi_l = 0$ si $l < 0$.

Les probabilités de transition de i à j :

$$p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$$

sont plus aisées à exprimer en s'aidant d'une représentation graphique (*fig. 6*) des couples de points de coordonnées (l, i) dans un plan (l, i) . Les états $X_n = i < K' = 1$ sont représentés par le sous-ensemble de couples $S = \{(l, i) : i < 1\}$. Les états $X_n = i \geq K' = 1$ sont représentés par le sous-ensemble $S' = \{(l, i) : i \geq 1\}$.

Le calcul fait également intervenir le sous-ensemble de S' :

$$S_j = \{(l, i) : i - j \leq l < i\}.$$

Les probabilités de transition sont :

$$p_{ij} = a_j \sum_S \pi_l + \sum_{S_j} a_{l+j-i} \pi_l.$$

Les états d'équilibre sont donnés par :

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} p_i$$

ou

$$p_j = a_j \sum_S p_i \pi_i + \sum_{S_j} a_{l+j-i} p_i \pi_i,$$

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j \sum_S p_i \pi_i + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{S_j} a_{l+j-i} p_i \pi_i s^j.$$

Or le domaine S_j peut être décrit par la ligne de points $(l, j) : i = l + j - k$ lorsque $k = l + j - i$ varie de 0 à j . Faisons apparaître dans la deuxième

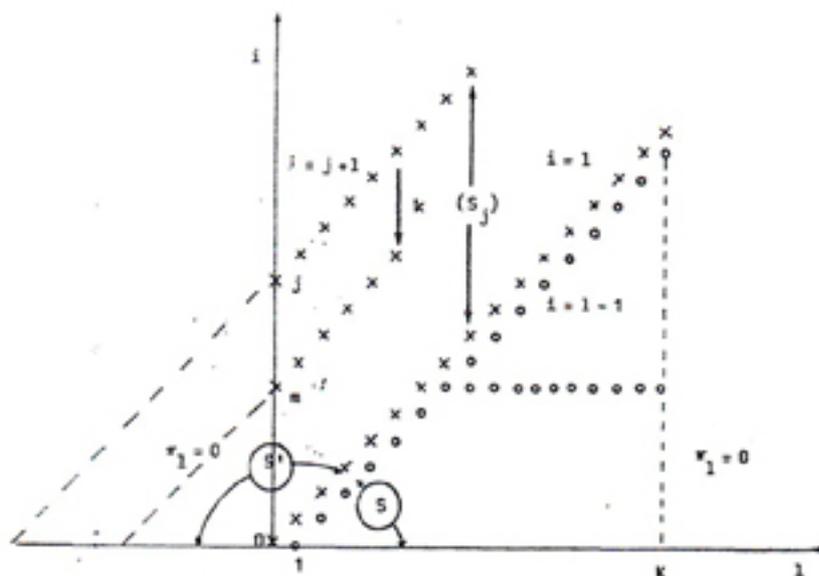


Figure 6

somme le coefficient de $a_k s^k$: on constate qu'il s'exprime uniquement en fonction de la variable : $m = i - l = j - k$. Ce coefficient est :

$$\sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i-l=m=j-k} p_i \pi_i s^{i-l} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i-l=m} p_i \pi_i s^{i-l} = \sum_{S'} p_i \pi_i s^{i-l}$$

puisque le domaine S' est balayé par la ligne $i - l = m$ quand m varie de 0 à ∞ .

Il en résulte que la fonction $A(s)$ peut être factorisée

$$P(s) = A(s) \left[\sum_S p_i \pi_i + \sum_{S'} p_i \pi_i s^{i-l} \right].$$

On peut également utiliser l'identité :

$$P(s) \Pi\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{S+S'} p_i \pi_i s^{i-l}$$

pour écrire :

$$P(s) = A(s) \frac{\sum p_i \pi_i (1 - s^{i-l})}{1 - A(s) \Pi(1/s)}.$$

Application à des véhicules de K -places

Dans ce cas, $\pi_l = 0$ si $l > K$, et

$$\Pi\left(\frac{1}{s}\right) = s^{-K}(\pi_K + \pi_{K-1}s + \dots + \pi_0 s^K) = s^{-K} \Pi_1(s)$$

en appelant $\Pi_1(s)$ la fonction génératrice des probabilités de K^n , polynôme de degré K . De même le numérateur de $P(s)$ est un polynôme $Q(s)$ de degré K , dont l'expression contient K inconnues P_0, P_1, \dots, P_{K-1} , divisé par s^K . D'où :

$$P(s) = \frac{A(s) Q(s)}{s^K - A(s) \Pi_1(s)}$$

Il faut K équations pour déterminer $P(s)$, dont une est trouvée en écrivant que :

$$p(1) = 1, A'(1) = E(N) = K(G - g),$$

$$\Pi'(1) = E(K') = K(1 - g),$$

$$K(1 - G) = \sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{l-1} (l-i) p_i \pi_l.$$

Les autres équations s'obtiennent à partir du théorème de Rouché appliqué au domaine $|s| \leq 1$: l'équation $s^K - A(s) \Pi_1(s) = 0$ à la racine $s'_0 = 1$ et $(K-1)$ racines s'_j telles que $|s'_j| < 1$, qui sont donc aussi racines du numérateur [$P(s)$ est régulier dans le domaine].

D'où les $(K-1)$ équations supplémentaires

$$\sum_{l=0}^K \sum_{i=0}^{l-1} p_i \pi_l (s_j^K - s_j^{K+i-l}) = 0.$$

Les racines s'_j du dénominateur sont trouvées par exemple en appliquant le théorème de Cauchy : posant $s = r e^{i\varphi}$, on intègre le dénominateur sur le cercle de rayon r , et on observe les variations de cette intégrale en fonction de r .

BIBLIOGRAPHIE

1. F. GIRAUD et M. KADOSCH, *Lectures on public transportation techniques* at Transportation Systems Center, Cambridge, Mass., juin 1973.
2. M. KADOSCH, *La sécurité dans les nouveaux systèmes de transport*, Sciences et Techniques, février 1975.
3. M. KADOSCH et F. GIRAUD, *Limites d'emploi imposés par la contrainte de sélectivité aux systèmes de transport guidé en site propre*, R.A.I.R.O., mai 1974, V-2.
4. B. V. GNEDENKO et I. N. KOVALENKO, *Introduction to queueing theory*.
5. W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*.
6. M. KADOSCH et F. GIRAUD, *Les temps d'attente dans les transports en site propre* (à paraître dans « Automatismes »).